ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

DURÉE : 2 heures

L'objectif est d'étudier un procédé d'approximation d'une intégrale convergente de la forme :

$$I = \int_0^1 \frac{f(t)}{t^\alpha}\, dt,$$

où α est un nombre réel appartenant à $]0, 1[$, et où f est une fonction de classe C^∞ sur $[0, 1]$. À cet effet, on utilise un développement taylorien de f au voisinage de 0, de façon à se ramener au cas d'une intégrale de la forme $J = \int_0^1 g(t)\, dt$, où g est de classe C^p sur $[0, 1]$. Pour approcher J, on se ramène à une intégration sur $[-1, 1]$, ce qui permet d'exploiter la parité.

Pour tout entier naturel $k \leqslant p$, on note $D^k g$ la dérivée $k^{ième}$ de g.

I. APPROXIMATION DE L'INTÉGRALE J

1. *Étude d'un système interpolateur optimal.*

Soient n un entier naturel non nul, $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ une suite de n points distincts de $[-1, 1]$ et N le polynôme défini par la relation :

$$N = \prod_{j=1}^{n} (X - x_j).$$

a. Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_1 \ldots, \lambda_n)$ de nombres réels et une seule telle que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$,

$$\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x_2) + \ldots \lambda_n P(x_n). \tag{1}$$

b. Prouver que la formule (1) reste valable pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n - 1$ si et seulement si, pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n - 1$,

$$\int_{-1}^{1} N(x)\, Q(x)\, dx = 0. \tag{2}$$

c. Soit S_n l'unique polynôme de degré $2n$ tel que $D^n S_n = N$ et que, pour tout entier k appartenant à $[0, n - 1]$, $D^k S_n(-1) = 0$.

Prouver que N satisfait à la condition (2) si et seulement si $S_n(X) = a_n (X^2 - 1)^n$, où a_n est un nombre réel strictement positif que l'on explicitera. On transformera pour cela la condition (2) à l'aide de n intégrations par parties successives.

d. Inversement, S_n étant ainsi déterminé, montrer que toutes les racines de $N = D^n S_n$ sont réelles, simples, et appartiennent à $]-1, 1[$.

On suppose dans toute la suite du problème que N est ainsi choisi.

e. Désormais, on prend $n = 3$. Expliciter N et calculer les zéros x_1, x_2, x_3 de ce polynôme. En appliquant la relation (1), valable si le degré de P est inférieur ou égal à 5, à des polynômes P convenablement choisis, calculer λ_1, λ_2, λ_3.

2. *Approximation de l'intégrale* J.

Soit h une fonction à valeurs réelles de classe C^6 sur $[-1, 1]$.

a. Montrer qu'il existe un polynôme P_h de degré inférieur ou égal à 5 et un seul tel que $P_h(x_j) = h(x_j)$ et $P_h'(x_j) = h'(x_j)$, où $j = 1, 2, 3$.

Tournez la page S. V. P.

b. On admet que, pour tout point x de $[-1, 1]$,

$$|h(x) - P_h(x)| \leqslant \frac{|N(x)|^2}{6!} \sup_{[-1,1]} |D^6 h|.$$

En déduire que :

(3) $$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = \lambda_1 h(x_1) + \lambda_2 h(x_2) + \lambda_3 h(x_3) + \delta(h), \text{ où } |\delta(h)| \leqslant \frac{1}{15\,750} \sup_{[-1,1]} |D^6 h|.$$

c. Soit maintenant g une fonction à valeurs réelles de classe C^6 sur $[0, 1]$. À l'aide de *b.* prouver que

(4) $$\int_0^1 g(t)\,dt = \frac{4}{9} g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{18}\left[g\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + g\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] + \rho(g), \text{ où } |\rho(g)| \leqslant 5.10^{-7} \sup_{[0,1]} |D^6 g|.$$

3. *Mise en œuvre sur un exemple.*

On considère l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$.

a. Calculer J par primitivation.

b. Calculer, par la formule (4), une valeur approchée J′ de J et donner une estimation de la précision obtenue.

c. Comparer J′ à la valeur exacte obtenue au *a.*

II. Approximation de l'intégrale I

1. *Expression de l'intégrale* I *à l'aide de* J.

Soient p un entier non nul, et f une fonction à valeurs réelles de classe C^∞ sur $[0, 1]$, que l'on écrit sous la forme :

$$f(t) = f(0) + \frac{t}{1!} Df(0) + \ldots + \frac{t^p}{p!} D^p f(0) + R_p(t).$$

a. En exprimant le reste R_p sous forme intégrale, montrer que R_p peut s'écrire sous la forme $R_p(t) = t^{p+1} \varphi_p(t)$, où φ_p est de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

b. Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par les relations :

$$g(t) = \frac{R_p(t)}{t^\alpha} \quad \text{si} \quad t \neq 0 \qquad \text{et} \qquad g(0) = 0.$$

Montrer que g est de classe C^p sur $[0, 1]$.

c. On prend désormais $p = 6$. Expliciter la formule ramenant le calcul de I à celui de $J = \int_0^1 g(t)\,dt$.

2. *Mise en œuvre sur un exemple.*

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,dt$.

a. Établir la convergence de cette intégrale et calculer I par primitivation.

b. Montrer que, si l'on prend $\alpha = \frac{1}{2}$, les hypothèses de la question 1 sont satisfaites. Exprimer I en fonction de J par la méthode indiquée au 1.*c* et déterminer une valeur approchée J′ de J grâce à l'approximation (4) (on ne demande pas de donner une estimation de la précision obtenue).

c. Comparer la valeur approchée I′ de I ainsi obtenue à la valeur exacte obtenue au *a.*